

# VMO 函数与上半连续函数和的拓扑度

张 军

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510006)

摘要: 在有界区域上定义了 VMO 函数与上半连续闭凸值映射和的拓扑度, 并讨论了其拓扑度的一些性质.

关键词: VMO 函数; 上半连续闭凸值映像; 拓扑度

中图分类号: O177.91

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2010)04-0065-03

## 1 预备知识

自上世纪 80 年代开始, 由于非线性偏微分方程研究的需要, 人们开始建立一些非连续函数的拓扑度理论, Brezis 和 Nirenberg<sup>[1-2]</sup> 在 1996 年建立了 VMO 函数的拓扑度理论. 本文的目的就是建立 VMO 函数与上半连续闭凸值映射和的拓扑度理论. 为完整起见, 首先回顾下列概念:

定义 1<sup>[3]</sup> 设  $X$  和  $Y$  都是拓扑空间, 且  $T: X \rightarrow 2^Y$  为集值映像, 即  $\forall x \in X, Tx$  是  $Y$  的一个子集. 若  $x_0 \in X$ , 对  $Tx_0$  的任意开邻域  $V(Tx_0)$ , 存在开邻域  $U(x_0)$  使得  $TU \subset V$ , 则称  $T$  在  $x_0$  处是上半连续. 若  $T$  在  $X$  中的每点都上半连续, 则称  $T$  在  $X$  上为上半连续.

定义 2<sup>[1]</sup> 设  $X$  是度量空间, 考虑实函数  $f \in L^1(X)$  使用如下度量:

$$\|f\|_{\text{BMO}} = \sup_{\varepsilon < r_0, x \in \Omega} \frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \bar{f}_\varepsilon(x)| d\sigma(y).$$

其中  $r_0 = r_0(X)$  为  $X$  的内射半径<sup>[4]</sup>,  $\sigma$  是  $\Omega$  上的体积元,  $B_\varepsilon(x)$  表示  $X$  中以  $x$  为球心,  $\varepsilon < r_0$  为半径的测地球.  $\bar{f}_\varepsilon(x) = \frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_{B_\varepsilon(x)} f(z) d\sigma(z)$ . 若  $\|f\|_{\text{BMO}} < \infty$ , 则称  $f \in \text{BMO}(X, R)$ ,  $\text{BMO}(X, R)$  简记为  $\text{BMO}$  (bounded mean oscillation).

如果  $f \in \text{BMO}(X, R)$ , 并且存在光滑函数列  $f_j$ , 使得  $\|f_j - f\|_{\text{BMO}} \rightarrow 0$ , 则称  $f \in \text{VMO}(X, R)$ ,  $\text{VMO}(X, R)$  简记为  $\text{VMO}$  (vanishing mean oscillation).

引理 1 (逼近选择定理<sup>[3]</sup>) 设  $X$  是度量空间,  $Y$  是赋范空间.  $T: X \rightarrow 2^Y$  为上半连续闭凸值映像. 那么  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在连续映像  $f_\varepsilon: X \rightarrow Y$  满足  $\forall x \in X, \exists y \in Tx$  及  $z \in Ty$ , 使得  $d(x, y) < \varepsilon, \|f_\varepsilon x - z\| < \varepsilon$ .

引理 2<sup>[2]</sup> 若  $f \in \text{BMO}$ , 则下列命题等价:

(1)  $f \in \text{VMO}$ .

$$(2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \bar{f}_\varepsilon(x)| d\sigma(y) = 0 \text{ 关于 } x \text{ 一致成立.}$$

$d\sigma(y) = 0$  关于  $x$  一致成立.

## 2 主要结论

定理 设  $\Omega \subset R^n$  为有界区域,  $f: \Omega \rightarrow R^n$  为 VMO 函数,  $T: \bar{\Omega} \rightarrow 2^{R^n}$  为上半连续闭凸值映像, 若存在常数  $d > 0$  及  $\partial\Omega$  上的邻域  $U \subset \Omega$ , 使得对任意  $B \subset U, B \in \Theta, \forall \eta, \varepsilon \in (0, \eta_0], \forall y \in B_\eta(x)$  及  $g(y) \in Ty$ , 有  $\frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |f(x) + g(y) - p| \geq d$  成立, 则可定义  $\deg(f + T, \Omega, p) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, p)$ , 其中  $\eta_0 = \min\{\varepsilon_0, \frac{d}{2}, \frac{1}{2} \text{dist}(x, \partial\Omega)\}$ ,  $\varepsilon_0$  取自  $f$  满足 VMO 函

数的条件,  $\Theta = \left\{ \begin{array}{l} B_\varepsilon(x) \mid B_\varepsilon(x) \text{ 是以 } x \text{ 为球心,} \\ \varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(x, \partial\Omega) \text{ 为半径的球} \end{array} \right\}$

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

证明 先证明  $\deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, p)$  有定义, 再证明  $\deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, p)$  与  $\varepsilon$  及  $\eta$  的选择无关.

因为  $T: \bar{\Omega} \rightarrow 2^{R^n}$  是上半连续闭凸集值映像, 由逼近选择定理知, 对任意  $0 < \eta \leq \frac{d}{2}$ , 存在单值连续函数  $g_\eta: \bar{\Omega} \rightarrow 2^{R^n}$  满足:  $\forall x \in B_\varepsilon(x) \subset U \subset \bar{\Omega}, \exists y \in \bar{\Omega}$  及  $g(y) \in Ty$  有  $\|x - y\| < \eta, \|g_\eta(x) - g(y)\| < \eta \leq \frac{d}{2}$ , 成立.

由三角不等式  $|f(x) + g_\eta(x) - p| \geq |f(x) + g(y) - p| - |g_\eta(x) - g(y)|$  知:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m(B_\varepsilon(X))} \int_B |f(x) + g_\eta(x) - p| \geq \\ & \frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |f(x) + g(y) - p| - \\ & \frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |g_\eta(x) - g(y)| \geq \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

因为  $f$  为 VMO 函数, 所以  $\exists \varepsilon_0$ , 当  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  且  $\varepsilon \leq \frac{1}{2} \text{dist}(x, \partial\Omega)$  时,  $\forall x \in \Omega$  有:  $\frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |f - \bar{f}_\varepsilon| \leq d/4$  成立.

又由三角不等式  $|\bar{f}_\varepsilon + g_\eta - p| \geq |f + g_\eta - p| - |f - \bar{f}_\varepsilon|$  知:

取  $\eta_0 = \min\left\{\varepsilon_0, \frac{1}{2}d, \frac{1}{2}\text{dist}(x, \partial\Omega)\right\}$ , 当  $0 < \eta \leq \eta_0, 0 < \varepsilon \leq \eta_0$  时,  $\forall x \in \Omega$  有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |\bar{f}_\varepsilon + g_\eta - p| \geq \frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |f + \\ & g_\eta - p| - \frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |f - \bar{f}_\varepsilon| \geq \\ & \frac{d}{2} - \frac{d}{4} = \frac{d}{4}. \end{aligned}$$

再由  $\bar{f}_\varepsilon + g_\eta$  的连续性知对  $x \in \partial\Omega_\varepsilon$ , 有

$$|\bar{f}_\varepsilon + g_\eta - p| \geq d/4, \quad (*)$$

从而可以定义  $\deg(f + T, \Omega, p) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, p)$ .

再证明  $\deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, p)$  与  $\varepsilon$  及  $\eta$  的选择无关.

不妨设  $p = 0$ , 下面先证明与  $\varepsilon$  的选择无关.

$\forall \varepsilon \in (0, \eta_0]$ ,  $\exists \delta(\varepsilon)$ , 使得当  $|t - \varepsilon| < \delta$  有

$\deg(\bar{f}_t + g_\eta, \Omega_t, 0) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, 0)$  成立, 则命题得证.

由于  $\bar{f}_t + g_\eta$  是  $x$  和  $t$  的连续函数, 由式 (\*) 知, 存在  $\delta > 0$ , 当  $|t - \varepsilon| < \delta$ , 且  $\text{dist}(x, \partial\Omega_\varepsilon) < \delta$  时, 有  $|\bar{f}_t + g_\eta| \geq d/8$ . 因此, 对  $|t - \varepsilon| < \delta$ ,  $\deg(\bar{f}_t + g_\eta, \Omega_\varepsilon, 0)$  有定义.

据同伦不变性和式 (\*) 知,  $\deg(\bar{f}_t + g_\eta, \Omega_\varepsilon, 0)$  与  $t$  无关, 所以有

$$\deg(\bar{f}_t + g_\eta, \Omega_\varepsilon, 0) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, 0),$$

再根据切除性和式 (\*) 知,  $\deg(\bar{f}_t + g_\eta, \Omega_t, 0) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, 0)$ .

同样不妨设  $p = 0$ , 再证明  $\deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, p)$  与  $\eta$  的选择无关.

若  $\eta, \lambda \in (0, \eta_0]$ , 则证明  $\deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, 0) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\lambda, \Omega_\varepsilon, 0)$  成立即可.

当  $x \in \partial\Omega_\varepsilon$  时, 有  $|\bar{f}_\varepsilon + g_\eta| \geq d/4$ , 由同伦不变性知  $\deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, 0) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\lambda, \Omega_\varepsilon, 0)$ .

### 3 性质及应用

**定义 (essR)**  $\text{essR}(f + T)$  是闭集  $\Sigma \subset R^n$  中最小的集合, 满足  $f(x) + Tx \subset \Sigma a. e.$

**性质 1** 若  $\text{dge}(f + T, \Omega, p) \neq 0$ , 则  $p \in \text{essR}(f + T)$ .

**证明** 若  $p \notin \text{essR}(f + T)$ , 则  $p \in [\text{essR}(f + T)]^c$ , 从而存在  $r > 0$ , 使得  $B_r(p) \subset [\text{essR}(f + T)]^c$ , 因而有  $\text{essR}(f + T) \cap B_r(p) = \emptyset$ . 令  $\Sigma = R^n \setminus B_r(p)$ , 则  $f(x) + Tx \subset \Sigma a. e.$ ,  $x \in \Omega$ . 所以有  $d(p, \Sigma) \geq r$ ,  $x \in \Omega$ . 已知  $\bar{f}_\varepsilon + g_\eta: \bar{\Omega} \rightarrow R^n$  是连续函数, 令  $\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ , 则有  $d(p, \bar{f}_\varepsilon(x) + g_\eta(x)) \geq r/2, x \in \Omega$ . 从而  $\bar{f}_\varepsilon + g_\eta$  在  $\Omega$  内无解, 所以  $\deg(f + T, \Omega, p) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, p) = 0$  矛盾. 因此, 若有  $\deg(f + T, \Omega, p) \neq 0$ , 则  $p \in \text{essR}(f + T)$ .

**性质 2** 如果  $f_i: [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow R^n$  关于  $\text{BMO}(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  连续,  $T_i: [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow 2^{R^n}$  为上半连续闭凸值映像. 对给定的  $p \in R^n$ , 存在  $d > 0$  及  $\partial\Omega$  上的邻域  $U \subset \Omega$ , 使得对任意  $B \subset U, B \in \Theta, \forall \eta, \varepsilon \in (0, \eta_0]$ ,  $\forall y \in B_\eta(x)$  及  $g_i(y) \in T_i y$ , 都有  $\frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |f_i(x) + g_i(y) - p| \geq d$  成立, 则  $\deg(f_i + T_i, \Omega, p)$  与  $t$  无关.

**证明** 因为  $H_t = \bar{f}_t + g_t^n: [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow R^n$  是连续函数, 因而关于  $\text{BMO}(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  连续. 令  $\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ , 根据  $H_t$  的连续性知道, 对题设  $d > 0$  及  $U \subset \Omega$ , 有

$$\frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |\bar{f}_t(x) + g_t^\eta(x) - p| \geq \frac{d}{2}.$$

于是由同伦不变性知  $\deg(\bar{f}_t + f_t^n, \Omega_\varepsilon, p)$  与  $t$  无关, 再由  $\deg(f_t + T_t, \Omega, p)$  的定义知,  $\deg(f_t + T_t, \Omega, p)$  也与  $t$  无关.

**推论 1** 如果  $f_1: \bar{\Omega} \rightarrow R^n, f_2: \bar{\Omega} \rightarrow R^n$  都关于  $\text{BMO}(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  连续,  $T: \bar{\Omega} \rightarrow 2^{R^n}$  为上半连续闭凸值映像. 对给定的  $p \in R^n$ , 存在  $d > 0$  及  $\partial\Omega$  上的邻域  $U \subset \Omega$ , 使得对任意  $B \subset U, B \in \Theta, \forall \eta, \varepsilon \in (0, \eta_0]$ ,

$\forall y \in B_\eta(x)$  及  $g(y) \in Ty$ , 都有  $\frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |tf_1(x) + (1-t)f_2(x) + g(y) - p| \geq d$  成立, 则  $\deg(tf_1 + (1-t)f_2 + T, \Omega, p)$  与  $t$  无关.

**证明**  $tf_1 + (1-t)f_2$  关于  $\text{BMO}(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  连续, 由性质 2 知

$$\deg(tf_1 + (1-t)f_2 + T, \Omega, p) \text{ 与 } t \text{ 无关.}$$

**推论 2** 如果  $f: \bar{\Omega} \rightarrow R^n$  关于  $\text{BMO}(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  连续,  $T_1: \bar{\Omega} \rightarrow 2^{R^n}, T_2: \bar{\Omega} \rightarrow 2^{R^n}$  为上半连续闭凸值映像. 对给定的  $p \in R^n$ , 存在  $d > 0$  及  $\partial\Omega$  上的邻域  $U \subset$

$\Omega$ , 使得对任意  $B \subset U, B \in \Theta, \forall \eta, \varepsilon \in (0, \eta_0], \forall y \in B_\eta(x)$  及  $g_1(y) \in T_1 y, g_2(y) \in T_2 y$  都有  $\frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |f(x) + tg_1(y) + (1-t)g_2(y) - p| \geq d$  成立, 则  $\deg(f + tT_1 + (1-t)T_2, \Omega, p)$  与  $t$  无关.

**证明**  $tT_1 + (1-t)T_2$  为上半连续闭凸值映像, 由性质 2 知  $\deg(f + tT_1 + (1-t)T_2, \Omega, p)$  与  $t$  无关.

**性质 3** 设  $\Omega \subset R^n$  为有界区域,  $f: \Omega \rightarrow R^n$  为 VMO 函数,  $T: \bar{\Omega} \rightarrow 2^{R^n}$  为上半连续闭凸值映像, 若存在常数  $d > 0$  及  $\partial\Omega$  上的邻域  $U \subset \Omega$ , 使得对任意  $B \subset U, B \in \Theta, \forall \eta, \varepsilon \in (0, \eta_0], \forall y \in B_\eta(x)$  及  $g(y) \in T y$ , 有  $\frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |f(x) + g(y) - p| \geq d$  成立. 若  $\Omega_1, \Omega_2$  是  $\Omega$  的两个互不相交的开子集, 则  $\deg(f + T, \Omega, p) = \deg(f + T, \Omega_1, p) + \deg(f + T, \Omega_2, p)$ .

**证明** 由定义知,

$\deg(f + T, \Omega, p) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon, p), \deg(f + T, \Omega_1, p) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon^1, p), \deg(f + T, \Omega_2, p) = \deg(\bar{f}_\varepsilon + g_\eta, \Omega_\varepsilon^2, p)$ . 注意到  $\Omega_\varepsilon^1 \cap \Omega_\varepsilon^2 = \emptyset$ , 对题设  $d > 0$

及  $U \subset \Omega$ , 有  $\frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_B |\bar{f}_\varepsilon + g_\eta(x) - p| \geq d$ , 根据 Brouwer 度的可加性<sup>[5-6]</sup>知道

$\deg(\bar{f}_\varepsilon + f_\eta, \Omega_\varepsilon, p) =$

$\deg(\bar{f}_\varepsilon + f_\eta, \Omega_\varepsilon^1, p) + \deg(\bar{f}_\varepsilon + f_\eta, \Omega_\varepsilon^2, p),$

于是有

$\deg(f + T, \Omega, p) =$

$\deg(f + T, \Omega_1, p) + \deg(f + T, \Omega_2, p).$

**性质 4 (Borsuk)** 设  $\deg(f + T, \Omega, p)$  有定义,  $p = 0$ . 如果  $0 \in \Omega, \Omega$  关于原点对称, 在  $\partial\Omega$  附近  $f$  是奇函数,  $T(-x) = -Tx$ . 则  $\deg(f + T, \Omega, 0)$  必是奇数.

**证明** 由题设知, 当  $\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$  时, 在  $\partial\Omega$  附近  $\bar{f}_\varepsilon(-x) = -\bar{f}_\varepsilon(x), g_\eta(-x) = -g_\eta(x)$ , 所以  $\bar{f}_\varepsilon + g_\eta$  在  $\partial\Omega$  附近是奇函数, 由连续函数的 Borsuk 定理<sup>[5-6]</sup>及  $\deg(f + T, \Omega, p)$  的定义即可得到  $\deg(f +$

$T, \Omega, 0)$  是奇数.

**性质 5 (边界值性质)**  $\deg(f + T, \Omega, p)$  只与  $f + T$  在  $\partial\Omega$  附近上的取值有关, 即: 若  $f, h: \Omega \rightarrow R^n$  为 VMO 函数,  $T, R: \bar{\Omega} \rightarrow 2^{R^n}$  为上半连续闭凸值映像,  $\deg(f + T, \Omega, p)$  与  $\deg(h + R, \Omega, p)$  均有定义, 若存在常数  $d > 0$  及  $\partial\Omega$  上的邻域  $U \subset \Omega$ , 使得  $\forall x \in U$  都有  $f(x) + T(x) = h(x) + R(x)$  成立, 则必有  $\deg(f + T, \Omega, p) = \deg(h + R, \Omega, p)$ .

**证明** 令  $H(t, x) = (1-t)(f(x) + T(x)) + t(h(x) + R(x)), t \in [0, 1], x \in \bar{\Omega}$ . 又令  $h_t(x) = H(t, x)$ . 由假定, 当  $x \in U$  时, 有  $h_t(x) = f(x) + T(x) = h(x) + R(x), t \in [0, 1]$  从而对满足  $\deg(f + T, \Omega, p)$  与  $\deg(h + R, \Omega, p)$  均有定义的  $p \in R^n$  及  $d > 0$ ,  $h_t(x)$  在  $\partial\Omega$  上的邻域  $U \subset \Omega$  上满足性质 2 所述的条件. 因此根据同伦不变性<sup>[5-6]</sup>知

$\deg(f + T, \Omega, p) = \deg(h_0, \Omega, p) =$

$\deg(h_1, \Omega, p) = \deg(h + R, \Omega, p).$

## 参考文献:

- [1] Haïm Brezis, Louis Nirenberg. Degree theory and BMO; Part I: Compact manifolds without boundaries [J]. Selecta Mathematica, New Series, 1995, 1(2): 201-222.
- [2] Haïm Brezis, Louis Nirenberg. Degree theory and BMO; Part II: Compact manifolds with boundaries [J]. Selecta Mathematica, New Series, 1996, 2(3): 309-368.
- [3] Yu Qing Chen, Yeol Je Cho. Nonlinear Operator Theory in Abstract Spaces and Applications [M]. New York: Nova Science Publishers, Inc, 2004: 72-75.
- [4] M P do Carmo. Riemannian geometry [M]. Boston: M P do Carmo, Riemannian geometry, Birkhäuser, 1992, 56-57.
- [5] Brouwer L E J. Über abbildung der mannigfaltigkeiten [J]. Math Ann, 1912(70): 97-115.
- [6] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 2 版. 山东: 山东科学技术出版社, 2001, 87-156.

## Topological Degree for the Sum of VMO Functions and Multi-valued Semi-continuous Mappings

Zhang Jun

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** It defines the topological degree for the sum of VMO functions and multi-valued semi-continuous mappings with boundaries, and studies some properties of this type of topological degree.

**Key words:** VMO functions; Multi-valued Semi-continuous Mappings; topological degree